

## РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Теоретический материал к данной теме содержится в [1, глава 4].

**Отчет** по лабораторной работе должен содержать постановку задачи, результаты расчетов и анализ результатов.

Варианты заданий к задачам 2.1-2.3 даны в ПРИЛОЖЕНИИ 2.А.

**Задача 2.1.** Методом простой итерации найти вещественные корни алгебраического уравнения  $P(x) = 0$  с точностью  $\varepsilon = 10^{-8}$ .

### ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ.

3. Для каждого корня определить итерационный параметр  $\alpha$  и параметр  $q$ , используя формулы:

$$\alpha = \frac{2}{M1+m1} \quad , \quad M1 = \max_{[a,b]} P'(x), \quad m1 = \min_{[a,b]} P'(x) \quad , \quad q = \left| \frac{M1-m1}{M1+m1} \right|, \quad \text{здесь } [a,b] \text{ - отрезок}$$

локализации корня. Минимумы и максимумы можно найти приближенно, используя график, построенный в п.2.

4. Составить программу для нахождения корня с заданной точностью  $\varepsilon$  по методу простой итерации. В качестве расчетной формулы использовать метод простой итерации с параметром:

$$x_{n+1} = x_n - \alpha P(x_n).$$

3. Используя программу, найти все корни многочлена с указанной точностью  $\varepsilon$ .
4. Результаты свести в таблицу:

ФИО						Группа		Номер варианта	
Уравнение:									
Корни:	$[a, b]$	$M1$	$m1$	$\alpha$	$q$	Корень с заданной точностью			
						Число итераций			
1-ый корень									
2-ой корень									
.....									

**Задача 2.2.** Дано уравнение  $f(x)=0$  Найти все корни уравнения с заданной точностью  $\varepsilon = 10^{-12}$  на указанном отрезке  $[a,b]$ . Для решения задачи использовать метод Ньютона и метод, указанный в индивидуальном варианте. Сравнить количество итераций, потребовавшихся для достижения заданной точности каждым методом.

## ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

1. Локализовать корни уравнения.
2. Составить программу вычисления корня методом Ньютона, предусмотрев в ней подсчёт числа итераций. Найти с заданной точностью корни уравнения на указанном в задании отрезке  $[a, b]$ .
3. Составить программу вычисления корня методом, указанным в индивидуальном варианте, предусмотрев в ней подсчёт числа итераций. Найти с заданной точностью  $\varepsilon$  те же корни уравнения, что в п.2.

4. Сравнить результаты проведенных расчётов, сведя их в таблицу.

5. Модифицировать методы так, чтобы каждый метод делал заданное количество итераций и на каждом шаге сохранял значение модуля невязки  $r_n = |f(x_n)|$ . Методы должны возвращать массив, хранящий значения  $r_n$ . Для каждого корня вызвать модифицированные методы так, чтобы они проделали 10 итераций. Построить графики зависимости  $r_n$  от  $n$ ,  $n = 0..10$ , в логарифмической шкале. Каждому корню должно соответствовать одно изображение, на котором нарисованы зависимости для двух методов. Полученный результат объясните.

Примечание: для построения графика в логарифмической шкале воспользуйтесь командой `plt.yscale('log')`.

Уравнение		
Расчетная формула метода Ньютона:		
Расчетная формула индивидуального метода :		
Задача 2.2		
Корни уравнения	Число итераций метода Ньютона	Число итераций метода

**Задача 2.3 . Найти корни уравнения и определить их кратность.**

#### ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ 1

**ВНИМАНИЕ!** Номер варианта  $N$  для лабораторных работ вычисляется по следующей формуле:

- 1)  $N = I$  для группы А-5-19;
- 2)  $N = 10 + I$  для группы А-13а-19
- 3)  $N = 20 + I$  для группы А-13б-19
- 4)  $N = 30 + I$  для группы А-14-19
- 5)  $N = 60 - I$  для группы А-16-19

(здесь  $I$  — индивидуальный номер студента по журналу).

#### ПРИЛОЖЕНИЕ 2.А.

#### ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ 2

Таблица к задаче 2.1

N	$P(x)$		$P(x)$
2.1.1	$0.9x^3 + 3.5x^2 - 0.3x - 1$	2.1.16	$0.9x^3 + 3.5x^2 - 0.3x - 4$
2.1.2	$0.7x^3 + 3.4x^2 - 12x + 1$	2.1.17	$9.8x^3 + 10x^2 - 8.8x - 4.2$
2.1.3	$-1.7x^3 - 23x^2 + 6x + 1$	2.1.18	$-2.8x^3 + 2x^2 + 19x - 3.7$
2.1.4	$-1.5x^3 + 4.5x^2 - 18x + 4$	2.1.19	$0.9x^3 + 3.5x^2 + 3x - 0.1$
2.1.5	$1.5x^3 - 8.4x^2 - 16x + 2$	2.1.20	$0.6x^3 - 8.5x^2 + 4x + 1.3$
2.1.6	$2.8x^3 - 13.6x^2 + 11x + 3$	2.1.21	$1.3x^3 + 3x^2 - 2.3x - 5.2$
2.1.7	$6.2x^3 + 1.3x^2 - 9.6x - 4$	2.1.22	$1.6x^3 - 1.7x^2 - 10.45x + 13.1$
2.1.8	$-5.8x^3 - 3.2x^2 + 10.1x - 2$	2.1.23	$-1.6x^3 + 1.9x^2 + 9.25x - 11.4$
2.1.9	$-0.8x^3 + 2.3x^2 + 14.1x - 3.7$	2.1.24	$2.3x^3 + 10.6x^2 - 9.25x - 25.4$

2.1.10	$-0.9x^3 + 3.5x^2 - 0.3x - 1$	2.1.25	$-3.3x^3 - 11.6x^2 + 8.75x + 15.4$
2.1.11	$1.1x^3 - 1.9x^2 - 2.5x + 1$	2.1.26	$-4.1x^3 - 3.4x^2 + 12.3x - 2.4$
2.1.12	$0.5x^3 - 1.1x^2 - 1.9x + 2.1$	2.1.27	$2.1x^3 - 13.4x^2 + 2.3x + 4.4$
2.1.13	$-1.8x^3 - 3.5x^2 + 1.2x + 3$	2.1.28	$1.3x^3 + 4.6x^2 - 2.3x - 2.2$
2.1.14	$5.9x^3 + 22x^2 - 8x - 1$	2.1.29	$4.3x^3 + 6.6x^2 - 3.3x - 4.2$
2.1.15	$4.6x^3 - 35x^2 + 4.8x + 1$	2.1.30	$0.6x^3 - 2.7x^2 - 13.45x + 14.1$

**ПРОДОЛЖЕНИЕ ТАБЛИЦЫ 2.1.**

2.1.31	$x^5 + 4.9x^4 + 7.5x^3 + 6.6x^2 + 6.7x + 1.7$
2.1.32	$x^5 - 7.2x^4 + 17.1x^3 - 18.5x^2 + 16.1x - 8.8$
2.1.33	$x^6 + 0.9x^5 - 0.2x^3 - 1.3x^2 - 0.7x + 0.1$
2.1.34	$x^5 - 5.3x^4 + 9.8x^3 - 10x^2 + 8.8x - 4.2$
2.1.35	$x^5 - 2.5x^4 + 2.1x^3 - 1.9x^2 + 1.1x - 0.1$
2.1.36	$3x^4 - 1.87x^3 - 1.2x^2 + 1.93x + 0.69$
2.1.37	$x^5 - 5.2x^4 + 19.8x^3 - 10x^2 + 8.8x - 5$
2.1.38	$x^5 + 5.1x^4 + 9.7x^3 - 9.9x^2 - 8.8x + 5$
2.1.39	$x^4 - 3.2x^3 + 7.1x^2 - 8.5x - 6.3$
2.1.40	$x^4 + 0.1x^3 - 0.9x^2 - 0.1x + 0.1$
2.1.41	$x^5 - 2.5x^4 + 2.1x^3 - 1.9x^2 + 1.1x + 0.5$
2.1.42	$x^5 - 4.2x^4 + 3.5x^3 - 1.8x^2 + 2.5x + 2.3$
2.1.43	$x^6 - 2.5x^5 + 1.4x^4 - 1.1x^2 + 2.6x - 1.3$
2.1.44	$x^5 - 8x^4 + 22x^3 + 11x^2 - 22x + 5$
2.1.45	$x^5 - 4.8x^4 + 7.5x^3 - 6.6x^2 + 6.8x - 4$
2.1.46	$x^5 + 7.2x^4 + 17.1x^3 - 18.5x^2 - 16.1x + 11.8$
2.1.47	$x^6 - 0.9x^5 + 0.2x^3 - 1.3x^2 + 0.7x + 0.1$
2.1.48	$x^5 + 5.3x^4 + 9.8x^3 + 10x^2 + 8.8x - 4.2$
2.1.49	$x^5 + 2.5x^4 + 2.1x^3 + 1.9x^2 + 1.1x - 0.1$
2.1.50	$x^4 + 1.88x^3 - 1.76x^2 - 1.92x - 0.71$
2.1.51	$x^5 + 5.2x^4 + 9.8x^3 + 9.9x^2 + 8.8x + 5$
2.1.52	$x^5 - 5.1x^4 + 9.6x^3 + 9.8x^2 - 8.8x - 5$
2.1.53	$x^4 - 3.2x^3 - 7.1x^2 - 8.5x - 1.4$
2.1.54	$x^4 + 0.1x^3 - 1.1x^2 - 0.2x + 0.1$
2.1.55	$x^5 - 2.5x^4 - 2.2x^3 - 1.9x^2 + 1.1x + 0.5$
2.1.56	$3x^5 - 77x^3 + 6.5x - 13.31$
2.1.57	$3x^4 - 3.5x^2 + 12.5x - 125$
2.1.58	$-x^6 + 2.9x^5 - 5.5x^4 - 22x^3 - 1.3x^2 + 2.7x - 0.1$
2.1.59	$x^5 - 3.6x^4 - 8.7x^3 + 5.5x^2 + 9.5x - 5.5$
2.1.60	$3x^4 - 1.2x^3 - 1.8x^2 - 2x - 8.4$

Таблица к задаче 2.2

№	f(x)	[a,b]
2.2.1	$e^x \sin(\pi x) + 2x \cos(\pi x) - 0.5$	[2,6]
2.2.2	$\sin(3^x) - \cos(3x) + 0.3$	[-1,2]
2.2.3	$5 \cdot 2^x \cos(\pi x) - 0.5x^2$	[2,6]
2.2.4	$9e^{x/6} \sin(\pi x^2) + 2 - x / 6$	[-2,1]
2.2.5	$4^{x/2} \cos(x^2 / 2) - x^2 + 1$	[5,8]
2.2.6	$\ln(x) \cos(3x) + \sin(x / 3) + 3$	[9,16]
2.2.7	$\sin^2(2x) + 0.2x$	[-2,2]
2.2.8	$\sqrt{x} \cos^2(4x) - 0.4x + 0.8$	[1,3]
2.2.9	$4^{x/3} \sin(\pi x) - \ln(3x) + 4$	[7,11]
2.2.10	$6x^3 \cos(x) - 0.5x^3 - 0.6$	[0,6]
2.2.11	$e^x \sin(3\pi x) - 2e^{\sin(x)} - x$	[2,4]
2.2.12	$2\sin(2\pi x) - 2\sin(3^x) - x$	[0,3]
2.2.13	$7 \cdot 2^x \cos(2\pi x) - 10 \cdot (x - 3)^2$	[2,4]
2.2.14	$\ln(x) \cos^2(x) - \ln(x - 3) \cos(x^2)$	[4,6]
2.2.15	$x^3 \sin(5x) + \cos(5x)$	[-2,2]
2.2.16	$2\sqrt{x} \sin(x) - \cos(4x) - 2$	[0,8]
2.2.17	$x \cos^2(3x) - 3^{-x-0.5}$	[0,3]
2.2.18	$3\sin^2(2x) + e^{0.5x} - 2$	[-2,2]
2.2.19	$10^{-x/2} + 3\sin(2\pi\sqrt{x})$	[0,5]
2.2.20	$x^2 \sin(3x) + \cos(5x)$	[-2,2]
2.2.21	$3x^2 \sin(x^2) - \sin(2x) - 0.3$	[-2,2]
2.2.22	$10^{-\sqrt{x}} - \sin(\pi\sqrt{x}) - 0.9$	[0,3]

<b>2.2.23</b>	$-3\sin(3x) + e^x - 2$	[-3,2]
<b>2.2.24</b>	$x^3 \cos^2(3x) - 3^x \sin(3x)$	[-2,2]
<b>2.2.25</b>	$\sin(x) - \sqrt{x} \cos(4x) - 1$	[5,10]
<b>2.2.26</b>	$3x \sin(x) - \sin(3x^2) - 4$	[-2,2]
<b>2.2.27</b>	$5\sin(3x) / x + 1 / x^2 + 1$	[1,5]
<b>2.2.28</b>	$15x^3 \cos(6x) - 6\ln(x)$	[6,8]
<b>2.2.29</b>	$4^{x/3} \cos(\pi x^2) + tg(x)$	[-1,1.5]
<b>2.2.30</b>	$\ln(x^3) \sin(6x) - \ln(x) tg(x)$	[8,11]
<b>2.2.31</b>	$12\sin(3^{-x}) - 2^{-x} - 0.5$	[-2.5,0]
<b>2.2.32</b>	$5\sin(x^2) + 3e^{\cos(x)} - 2$	[-2,4]
<b>2.2.33</b>	$\sin(3^x) - \cos(3x) + 0.3$	[-1,2]
<b>2.2.34</b>	$5 \cdot 2^x \cos(\pi x) - 0.5x^2$	[2,6]
<b>2.2.35</b>	$9e^{x/6} \sin(\pi x^2) + 2 - x / 6$	[-2,1]
<b>2.2.36</b>	$4^{x/2} \cos(x^2 / 2) - x^2 + 1$	[5,8]
<b>2.2.37</b>	$\ln(x) \cos(3x) + \sin(x / 3) + 3$	[9,16]
<b>2.2.38</b>	$\sin^2(2x) + 0.2x$	[-2,2]
<b>2.2.39</b>	$\sqrt{x} \cos^2(4x) - 0.4x + 0.8$	[1,3]
<b>2.2.40</b>	$\sqrt{x} \cos(x^3 / 3) - \sin(x^2 / 2)$	[0,4]
<b>2.2.41</b>	$4^{x/3} \sin(\pi x) - \ln(3x) + 4$	[7,11]
<b>2.2.42</b>	$6x^3 \cos(x) - 0.5x^3 - 0.6$	[0,6]
<b>2.2.43</b>	$e^x \sin(3\pi x) - 2e^{\sin(x)} - x$	[2,4]
<b>2.2.44</b>	$2\sin(2\pi x) - 2\sin(3^x) - x$	[0,3]
<b>2.2.45</b>	$7 \cdot 2^x \cos(2\pi x) - 10 \cdot (x - 3)^2$	[2,4]
<b>2.2.46</b>	$\ln(x) \cos^2(x) - \ln(x - 3) \cos(x^2)$	[4,6]

2.2.47	$x^3 \sin(5x) + \cos(5x)$	[-2,2]
2.2.48	$9\sin(2^{-2x}) - 3^{-x} - 0.5$	[-2,2]
2.2.49	$2\cos(x^2) + e^{\sin(x)} - 2$	[0,4]
2.2.50	$x^2 \sin(2^x) + \cos(3\pi x) - 1$	[-1,2]
2.2.51	$\sqrt{x} \cos^2(4x) - 0.4x + 0.8$	[1,3]
2.2.52	$\sqrt{x} \cos(x^2 / 3) - \sin(x^3 / 3)$	[0,4]
2.2.53	$9e^{x/6} \sin(\pi x^2) + 2 - x / 6$	[-2,1]
2.2.54	$15x^3 \cos(6x) - 6\ln(x)$	[6,8]
2.2.55	$e^{0.5x} \cos(\pi x) + x \sin(\pi x) - 1$	[2,6]
2.2.56	$2^{-x} \sin(x) + 3\cos(x^3)$	[-2,3]
2.2.57	$\ln(x^2) \sin(3x) - \ln(x) \sin(5x)$	[9,14]
2.2.58	$3^{x/3} \sin(\pi x^2) + \operatorname{tg}(x) / 3$	[-1.5,1.5]
2.2.59	$5x^3 \cos(6x) - 2\ln(x)$	[6,9]
2.2.60	$3\sin(5x) / x - 1 / x^2 + 0.5$	[1,5]

Таблица к задаче 2.3.

$N$	$f(x)$
2.3.1 2.3.31	$4\operatorname{arctg}\left(\frac{x+\sqrt{2}-1}{x+\sqrt{2}+1}\right) - (4-2\sqrt{2})x + x^2 - 4\sqrt{2} + 5$
2.3.2 2.3.32	$800\operatorname{arctg}\left(\frac{8x-15}{10x+16}\right) - 400x + 64x^2 + 525$
2.3.3 2.3.33	$8(\sqrt{2}-1)\operatorname{arctg}x - \pi(\sqrt{2}-1) - 2x(2\sqrt{2}-1) + 7 - 4\sqrt{2} + x^2$
2.3.4 2.3.34	$36\cos x + 18\sqrt{3}x + 9x^2 + \pi^2 - 18 - 6\sqrt{3}\pi - 6\pi x$
2.3.5 2.3.35	$144\sin x + 12\sqrt{3}\pi + 36x^2 + \pi^2 - 72 - 12\pi x - 72\sqrt{3}x$
2.3.6 2.3.36	$32\sqrt{2}\sin x + 8\pi + 16x^2 + \pi^2 - 32 - 8\pi x - 32x$
2.3.7 2.3.37	$\operatorname{ctg}x + 2x + \pi x - 1 - \pi/2 - 2x^2 - \pi^2/8$
2.3.8 2.3.38	$\sqrt{3}\operatorname{ctg}x + 4\sqrt{3}x + 4\pi x - 3 - 2\pi/\sqrt{3} - 12x^2 - \pi^2/3$
2.3.9 2.3.39	$36\sin x - 18\sqrt{3} + 9\sqrt{3}x^2 + \sqrt{3}\pi^2 - 18x - 6\sqrt{3}\pi x + 6\pi$

2.3.10 2.3.40	$36\sqrt{2}\cos x + 32x + 16x^2 + \pi^2 - 32 - 8\pi - 8\pi x$
2.3.11 2.3.41	$9\operatorname{tg}x + 4(\pi - 3)x + 2\pi - \sqrt{3}(3 + 4x^2 + \pi^2/9)$
2.3.12 2.3.42	$6\arcsin x + 24x - 12\sqrt{3}x^2 - 2\pi - 3\sqrt{3}$
2.3.13 2.3.43	$\operatorname{tg}x + \pi x - 2x^2 + 0.5\pi - 2x - 1 - \frac{\pi^2}{8}$
2.3.14 2.3.44	$48\sqrt{3}\cos x + 24\sqrt{3}x + 36x^2 - 4\pi\sqrt{3} - 12\pi x + \pi^2 - 72$
2.3.15 2.3.45	$144(2 + \sqrt{3})\operatorname{tg}x + 48\pi + 96(2 - \sqrt{3})\pi x - 144 - 576x - (2 - \sqrt{3})(576x^2 + 4\pi^2)$
2.3.16 2.3.46	$144(2 - \sqrt{3})\operatorname{ctg}x - 48\pi + 96(2 + \sqrt{3})\pi x - 144 + 576x - (2 + \sqrt{3})(576x^2 + 4\pi^2)$
2.3.17 2.3.47	$16(3 - 2\sqrt{2})\sqrt{2}\operatorname{ctg}x + 8\pi + 16\sqrt{2}(4x + 1) - 32 + 16\pi x - \pi^2 - 64x^2 - 64x - 8\sqrt{2}\pi$
2.3.18 2.3.48	$3\sqrt{3}\operatorname{ctg}x + 4\sqrt{3}x + \frac{8\pi x}{3} - 3 - \frac{4\pi}{\sqrt{3}} - 4x^2 - \frac{4\pi^2}{9}$
2.3.19 2.3.49	$\sqrt{3} + \frac{\cos x}{9} \left( \pi\sqrt{3} - 5\pi x - 18 - 6\sqrt{3}x - 15x^2 - \frac{5\pi^2}{12} \right)$
2.3.20 2.3.50	$6\sqrt{3}\arcsin x - 8x - 4x^2 - \pi\sqrt{3} + 5$
2.3.21 2.3.51	$4\operatorname{arctg} \left( \frac{x-1}{x+1} \right) - 4x + x^2 + 3$
2.3.22 2.3.52	$800\operatorname{arctg} \left( \frac{4x-11}{5x+21} \right) - 168x + 16x^2 + 341$
2.3.23	$32\sqrt{2}\sin x + 8\pi + 16x^2 + \pi^2 - 32 - 8\pi x - 32x$
2.3.24 2.3.54	$\operatorname{ctg}x + 2x + \pi x - 1 - \pi/2 - 2x^2 - \pi^2/8$
2.3.25 2.3.55	$\sqrt{3}\operatorname{ctg}x + 4\sqrt{3}x + 4\pi x - 3 - 2\pi/\sqrt{3} - 12x^2 - \pi^2/3$
2.3.26 2.3.56	$36\sin x - 18\sqrt{3} + 9\sqrt{3}x^2 + \sqrt{3}\pi^2 - 18x - 6\sqrt{3}\pi x + 6\pi$
2.3.27 2.3.57	$36\sqrt{2}\cos x + 32x + 16x^2 + \pi^2 - 32 - 8\pi - 8\pi x$
2.3.28 2.3.58	$9\operatorname{tg}x + 4(\pi - 3)x + 2\pi - \sqrt{3}(3 + 4x^2 + \pi^2/9)$
2.3.29 2.3.59	$6\arcsin x + 24x - 12\sqrt{3}x^2 - 2\pi - 3\sqrt{3}$
2.3.30 2.3.60	$\sqrt{3} + \frac{\cos x}{9} \left( \pi\sqrt{3} - 5\pi x - 18 - 6\sqrt{3}x - 15x^2 - \frac{5\pi^2}{12} \right)$

Варианты	Метод решения
$N = 1, 7, 13, 19, 25, 31, 37, 43, 49, 55$	Упрощенный метод Ньютона
$N = 2, 8, 14, 20, 26, 32, 38, 44, 50, 56$	Метод ложного положения
$N = 3, 9, 15, 21, 27, 33, 39, 45, 51, 57$	Метод секущих
$N = 4, 10, 16, 22, 28, 34, 40, 46, 52, 58$	Метод простой итерации

$N = 5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 53, 59$	Метод бисекции
$N = 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60$	Метод Стеффенсена

## **ПРИЛОЖЕНИЕ 2. В**

*Расчетные формулы методов решения нелинейного уравнения  $f(x) = 0$ .*

Упрощенный метод Ньютона:  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}, n=0, 1, \dots$

Метод ложного положения:  $x_{n+1} = x_n - \frac{c - x_n}{f(c) - f(x_n)} f(x_n), n=0, 1, \dots;$

с-фиксированная точка из окрестности корня

Метод секущих:  $x_{n+1} = x_n - \frac{x_{n-1} - x_n}{f(x_{n-1}) - f(x_n)} f(x_n), n=0, 1, \dots$

Метод Стеффенсена:  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)} f(x_n), n=0, 1, \dots$

## **ЛИТЕРАТУРА**

**1.** Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. М.: Высшая школа, 1994.